CASO 1 – ECUACIONES DIFERENCIALES
MAT. ENRIQUE NAVARRETE
OCT . 2004

Estos problemas tratan sobre diversas ecuaciones diferenciales para modelizar el crecimiento de las poblaciones. Las ecuaciones implican diferentes comportamientos a largo plazo, dependiendo o no de condiciones iniciales. Como siempre, gran parte de la utilidad de los modelos consistirá en el uso que les demos para poder realizar pronósticos.

Problema 1 (Estabilidad de soluciones)

1) Considere la ecuación (separable) $\frac{dx}{dt} = ax$, donde a es constante. Resuelva la ecuación tomando $x = x_0$ en $t = 0$. Analice el comportamiento de la solución cuando $t \to \infty$.

(Considere cada caso $a < 0$, $a > 0$ y $a = 0$ por separado). ¿En qué casos depende la solución del valor inicial x_0 ? ¿Por qué se le suele llamar al caso $a = 0$ *"punto de bifurcación"* ?

Problema 2 (Crecimiento de poblaciones)

1) Reconsidere la ecuación $\frac{dp}{dt} = ap$, ó *"ley de Malthus para el crecimiento de poblaciones"*, donde a es una tasa de crecimiento anual constante.

¿Cuál es el crecimiento implicado por esta ecuación para distintos valores de r cuando $t \to \infty$?

(la población inicial p_0 siempre es positiva).

2) ¿En cuánto tiempo se duplica la población en este modelo? (Considere el caso general y los casos específicos $r = 1$ % y $r = 10$ %.) ¿Cómo depende este valor de la población inicial ?

Si utilizáramos esta ecuación para modelizar el crecimiento de la población humana, ¿qué tasas de crecimiento serían "recomendables" ?

3) ¿Qué problemas vería en utilizar este modelo, en particular para realizar proyecciones ?

Problema 3 (Dinámica de poblaciones)

Considere una modificación de la ley de Malthus dada por

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2. \qquad (1)$$

1) ¿Cómo afectará a la solución la inclusión del nuevo término?

2) Resuelva esta ecuación separable, integrando de p_0 a p y de t_0 a t. Demuestre que la solución está dada por:

$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-a(t-t_0)}} . \qquad (2)$$

(*Sugerencia*: $\frac{1}{ap - bp^2} = \frac{1}{ap} + \frac{b}{a(a - bp)}$, por el método de fracciones parciales).

3) ¿Cuál es límite de la población cuando $t \to \infty$? ¿Cómo depende este valor de la población inicial? ¿Cuál es el crecimiento poblacional en el valor límite ?

4) Muestre que la población en este modelo experimenta crecimiento acelerado para $p(t) < \frac{a}{2b}$ y desacelerado para $p(t) > \frac{a}{2b}$.

(*Sugerencia*: Muestre que el punto *a/2b* es un *punto de inflexión*, utilizando la Ecuación (1) para obtener una segunda derivada $\frac{d^2p}{dt^2}$ y sustituyendo (1) en la ecuación obtenida).

Problema 4 (Dinámica de poblaciones – EEUU)

A continuación se encuentra una tabla con datos sobre la población de EEUU para diversos años:

TABLA 1: Población EEUU, 1790-1950

Año	Población
1790	3,929,000
1800	5,308,000
1810	7,240,000
1820	9,638,000
1830	12,866,000
1840	17,069,000
1850	23,192,000
1860	31,443,000
1870	38,558,000
1880	50,156,000
1890	62,948,000
1900	75,995,000
1910	91,972,000
1920	105,711,000
1930	122,775,000
1940	131,669,000
1950	150,697,000

En base a los censos de 1790, 1850 y 1910 se estimó un crecimiento natural de la población de EEUU correspondiente al 3,134 % (lo cual implica a = 0.03134), y se ha estimado b = 1.5887 x 10^{-10} (más adelante se tratará sobre la estimación de este parámetro).

1) Utilizando estos parámetros y la Ecuación (2) *proyecte* la población de EEUU al menos hasta el año 2050. (*Sugerencia*: Excel !)

2) Estime la *población límite* de EEUU. Demuestre que el período de crecimiento acelerado en EEUU *terminó en abril de 1914*.

3) Grafique la población real vs. el ajuste realizado por la Ecuación (2), así como las proyecciones hasta el año 2050. Estime el margen de error entre la realidad y el ajuste. ¿Le parece adecuado este modelo? ¿Cómo lo mejoraría?

<u>Problema 5</u> (Dinámica de poblaciones - Mundial)

Para la población mundial se ha estimado $a = 0.029$ y $b = 2.695 \times 10^{-12}$.

Si en 1965 había 3,340 millones de habitantes, ¿Cuántos habitantes hubiera pronosticado la Ecuación (2) para el año 2000? ¿Cuántos habitantes *realmente hubo* en el año 2000? ¿Estaríamos actualmente en un período de aceleración o desaceleración de la población?

<u>Problema 6</u> (Dinámica de poblaciones - Caso)

En 1930 se observó que la población de Francia crecía muy lentamente, mientras que la población francesa de Canadá crecía con rapidez. Puesto que se argumentaba que la gente era físicamente la misma tanto en Francia como en Canadá, surgió una aparente paradoja.

¿Cuál sería la respuesta a la paradoja según el modelo planteado por la Ecuación (2) ?